数理解析研究所講究録
第 1667 巻 2009 年 99-105

EXTREMAL STRUCTURE OF THE SET OF ABSOLUTE NORMS ON $\mathbb{R}^2$

($\mathbb{R}^2$ における absolute norm の集合の端点構造について)

小室　直人 (Naoto Komuro)　北海道教育大学旭川校
斎藤　吉助 (Kichi-Suke Saito)　新潟大学
三谷　健一 (Ken-Ichi Mitani)　新潟工科大学

はじめに

$\mathbb{R}^2$ 上の absolute norm 全体は自然な意味で凸構造を持つ。その端点全体の集合を決定し、端点をなすノルムについて、James 定数や Von Neumann-Jordan 定数を考察し、これまでに部分的ながら具体的な値も計算されている。本稿では、端点に関しこれまでに分かっている結果をまとめ、更に James 定数や Von Neumann-Jordan 定数のノルムに関する凸性について得られた結果についてまとめる。

1. 序

$\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が absolute norm であるとは、$\|(|x|,|y|)\| = \|(x,y)\|$ $(x,y\in\mathbb{R})$ であることとし、更に $\|(1,0)\| = \|(0,1)\| = 1$ を満たすとき、normalize されているという。ℓ_p-ノルム

$$\|(x,y)\|_p = \begin{cases} (|x|^p + |y|^p)^{1/p}, & \text{if} \quad 1 \le p < \infty, \\ \max\{|x|,|y|\}, & \text{if} \quad p = \infty \end{cases}$$

はその代表的なものである。$\mathbb{R}^2$ 上の absolute normalized norm 全体を AN_2 によって表記する。一方、$[0,1]$ 上の凸関数 ψ で

$$\psi(0) = \psi(1) = 1, \quad \max\{1-t, t\} \le \psi(t) \le 1 \quad (t\in[0,1])$$

を満たすもの全体を Ψ_2 とおくと、対応

$$\psi(t) = \|(1-t,\, t)\| \quad (t\in[0,1])$$

又は、

$$\|(x,y)\|_\psi = \begin{cases} (|x|+|y|)\psi\left(\dfrac{|y|}{|x|+|y|}\right), & \text{if} \quad (x,y) \ne (0,0), \\ 0, & \text{if} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2000 *Mathematics Subject Classification*. 46B20, 46B25.
Key words and phrases. Absolute normalized norm, von Neumann-Jordan constant.

によって、AN_2 と Ψ_2 とは $1:1$ に対応している。ℓ_p-ノルム $\|\cdot\|_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ に対応する凸関数 ψ_p は

$$\psi_p(t) = \begin{cases} ((1-t)^p + t^p)^{1/p}, & \text{if} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \max\{1-t, t\}, & \text{if} \quad p = \infty \end{cases}$$

で与えられる。

AN_2 は次の意味で凸構造を備えている。

$$\|\cdot\|, \|\cdot\|' \in AN_2 \Longrightarrow (1-\lambda)\|\cdot\| + \lambda\|\cdot\|' \in AN_2 \quad (\lambda \in [0,1]).$$

更に、対応 $\psi \to \|\cdot\|_\psi$ は凸結合をとる演算を保つ。すなわち、

$$(1-\lambda)\|\cdot\|_\psi + \lambda\|\cdot\|_{\psi'} = \|\cdot\|_{(1-\lambda)\psi+\lambda\psi'} \quad (\psi,\ \psi' \in \Psi_2,\ \lambda \in [0,1]).$$

この意味で、 Ψ_2 と AN_2 は凸構造に関しても同一視できる。

AN_2 に属するノルム $\|\cdot\|$ が AN_2 の端点であるとは、$\|\cdot\| = \frac{1}{2}(\|\cdot\|' + \|\cdot\|'')$, $\|\cdot\|', \|\cdot\|'' \in AN_2$ から $\|\cdot\|' = \|\cdot\|''$ が従うこととする。次節で端点全体の集合を記述する。3・4節では、James 定数および Von Neumann-Jordan 定数の端点に関する結果と、これらの定数をノルムの関数と見た時の凸性について考察する。

2. Ψ_2 および AN_2 の端点集合

$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \leq \beta \leq 1$ とし、$(\alpha,\beta) \neq (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ の時、

$$\psi_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} 1-t & (t \in [0,\alpha]) \\ \dfrac{\alpha+\beta-1}{\beta-\alpha}t + \dfrac{\beta-2\alpha\beta}{\beta-\alpha} & (t \in [\alpha,\beta]) \\ t & (t \in [\beta,1]) \end{cases}$$

$(\alpha,\beta) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ の時、$\psi_{1/2,1/2} = \psi_\infty$ とおく。$\psi_{\alpha,\beta}$ は Ψ_2 に属し、$\psi_{0,1} = \psi_1$ となる。更に、$\alpha = \frac{1}{2}$ 又は $\beta = \frac{1}{2}$ の時、$\psi_{\alpha,\beta} = \psi_\infty$ である。$\psi_{\alpha,\beta}$ に対応するノルム $\|\cdot\|_{\psi_{\alpha,\beta}}$ は、

$$\|(x_1,x_2)\|_{\psi_{\alpha,\beta}} = \begin{cases} |x_1| & (|x_2| \leq \dfrac{\alpha}{1-\alpha}|x_1|) \\ f(x_1,x_2) & (\dfrac{\alpha}{1-\alpha}|x_1| < |x_2|,\ \dfrac{1-\beta}{\beta}|x_2| < |x_1|) \\ |x_2| & (|x_1| \leq \dfrac{1-\beta}{\beta}|x_2|), \end{cases}$$

ただし、 $f(x_1,x_2) = \dfrac{(1-2\alpha)\beta}{\beta-\alpha}|x_1| + \dfrac{(2\beta-1)(1-\alpha)}{\beta-\alpha}|x_2| \quad ((x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2)$

で与えられる。集合 E を

$$E = \{\psi_{\alpha,\beta} \mid 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \leq \beta \leq 1\}$$

とおくと $E \subset \Psi_2$ である。ここで、端点集合を与える定理を記述する。

Theorem 2.1. 次の３条件は、すべて同値である。

(1) $\|\cdot\|_\psi$ は AN_2 の端点である。

(2) ψ は Ψ_2 の端点である。

(3) $\psi \in E$.

(1) と (2) の同値性は、前述のことから自明である。また、(3)$\Longrightarrow$(2) も容易に示すことができる。したがって、(2)$\Longrightarrow$(3) が証明の主要部分である。その証明には１次元の凸関数に関する凸解析学的な手法を用いる。

3. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi_{\alpha,\beta}})$ の Von Neumann-Jordan 定数

3・4節では、AN_2 の端点をなすノルムに関し、Von Neumann-Jordan 定数、James 定数に関し得られた結果をまとめ、更にこれらをノルムの関数と見たときの凸性について考察する。はじめに Von Neumann-Jordan 定数の基本性質のうち関連するものをあげる。Banach 空間 $(X, \|\cdot\|)$ に対し、von Neumann-Jordan 定数（NJ 定数）は

$$C_{NJ}((X, \|\cdot\|)) = \sup\left\{\frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{2(\|x\|^2 + \|y\|^2)} \mid x, y \in X \setminus \{0\}\right\}$$

と定義される。$1 \leq C_{NJ}(X) \leq 2$ が常に成り立ち $C_{NJ}(X) = 1$ であることと X が Hilbert 空間であることは同値である。$1 \leq p \leq \infty$ なる p に対し、$C_{NJ}(L_p) = 2^{\frac{2}{\min\{p,q\}}-1}$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ \dim L_p \geq 2)$ が成り立つ。更に、X が uniformly non-square であることの必要十分条件は $C_{NJ}(X) < 2$ で与えられる。ここで、X が uniformly non-square であるとは、$\|(x-y)/2\| \geq 1-\delta,\ \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ の時常に $\|(x+y)/2\| \leq 1-\delta$ となるような $\delta > 0$ が存在することである。以下、AN_2 の場合を考える。簡単な事実として、$\psi \in \Psi_2,\ \tilde{\psi}(t) = \psi(1-t)$ $(t \in [0,1])$ とするとき、$C_{NJ}((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)) = C_{NJ}((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\tilde{\psi}}))$ であることが言える。NJ 定数を ψ を用いて表す結果が知られていて、それを以下に示す。

Proposition 3.1 ([10]). $\psi_2 \leq \psi \in \Psi_2$ (*resp.* $\psi_2 \geq \psi \in \Psi_2$) ならば、

$$C_{NJ}((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)) = \max_{0\leq t\leq 1} \frac{\psi(t)^2}{\psi_2(t)^2} \left(resp.\ \max_{0\leq t\leq 1} \frac{\psi_2(t)^2}{\psi(t)^2}\right)$$

が成り立つ。

$\psi \in \Psi_2$ が $t = \frac{1}{2}$ で対称であるとは、

$$\psi(t) = \psi(1-t) \quad (t \in [0,1])$$

を満たすこととする。これは、対応するノルム $\|\cdot\|_\psi$ が

$$\|(x,y)\|_\psi = \|(y,x)\|_\psi \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

を満たすことと同値である。

Proposition 3.2 ([10]). $\psi \in \Psi_2$ が $t = \frac{1}{2}$ で対称であるとする。$M_1 = \max\limits_{0\leq t\leq 1} \dfrac{\psi(t)}{\psi_2(t)}$ 又は $M_2 = \max\limits_{0\leq t\leq 1} \dfrac{\psi_2(t)}{\psi(t)}$ が $t = \frac{1}{2}$ で最大値をとるならば、

$$C_{NJ}((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)) = M_1^2 M_2^2$$

が成り立つ。

$C_{NJ}((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi))$ を Ψ_2 上で定義されたノルムの関数と見ることが出来るが、Proposition 3.1 を用いることで、その凸性を次に示す。

Theorem 3.1. $X = \{\psi \in \Psi_2 \mid \psi \leq \psi_2\}$, $Y = \{\psi \in \Psi_2 \mid \psi \geq \psi_2\}$ とおく。このとき、X, Y はそれぞれ Ψ_2 の凸部分集合で、$C_{NJ}(X, \|\cdot\|_\psi)$ を ψ の関数と見るとき、X, Y それぞれにおいて凸である。すなわち、

$$C_{NJ}((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{(1-\lambda)\psi+\lambda\psi'})) \leq (1-\lambda)C_{NJ}((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)) + \lambda C_{NJ}((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi'}))$$

が、$\psi, \psi' \in X$ $(\psi, \psi' \in Y)$, $\lambda \in [0,1]$ に対して成り立つ。

証明 X 上の凸性を示す。関数 $\frac{1}{x^2}$ は $(0,\infty)$ で凸であることから、

$$\frac{1}{((1-\lambda)x+\lambda y)^2} \leq \frac{1-\lambda}{x^2} + \frac{\lambda}{y^2} \quad (x, y \in (0,\infty),\ \lambda \in [0,1])$$

が成り立つ。よって、ψ, $\psi' \in X$ をとると Proposition 3.1 より、

$$\begin{aligned}
C_{NJ}((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{(1-\lambda)\psi+\lambda\psi'})) &= \max_{0\leq t\leq 1} \frac{\psi_2(t)^2}{((1-\lambda)\psi(t)+\lambda\psi'(t))^2} \\
&\leq \max_{0\leq t\leq 1} \left(\frac{\psi_2(t)^2(1-\lambda)}{\psi(t)^2} + \frac{\psi_2(t)^2\lambda}{\psi'(t)^2}\right) \\
&\leq \max_{0\leq t\leq 1} \frac{\psi_2(t)^2(1-\lambda)}{\psi(t)^2} + \max_{0\leq t\leq 1} \frac{\psi_2(t)^2\lambda}{\psi'(t)^2} \\
&= (1-\lambda)C_{NJ}((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)) + \lambda C_{NJ}((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi'})).
\end{aligned}$$

Y 上での凸性は、関数 $\frac{1}{x^2}$ のかわりに x^2 を用いることで同様に示される。

次に、$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi_{\alpha,\beta}})$ における NJ 定数の具体的な値を考える。$\psi_{\alpha,\beta}$ が $t = \frac{1}{2}$ で対称 $(\alpha = 1-\beta)$ であるとき、$\psi_{1-\beta,\beta} \leq \psi_2$ となるための条件は $\frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ である。Proposition 3.2 を用いると次の結果が得られる。

Proposition 3.3.

$$C_{NJ}((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi_{1-\beta,\beta}})) = \begin{cases} \dfrac{\beta^2+(1-\beta)^2}{\beta^2} & (\beta \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}]) \\ 2(\beta^2+(1-\beta)^2) & (\beta \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]). \end{cases}$$

特に $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ の時、$C_{NJ}((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi_{1-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}}})) = 4 - 2\sqrt{2}$ であり Hilbert 空間でないことがわかるが、James 定数は $\sqrt{2}$ となる。この時の単位球は正 8 角形をなす。ψ の対称性がないときは、Proposition 3.1 から次の結果が得られる。

Theorem 3.2. $\psi_{\alpha,\beta} \leq \psi_2$ とするとき、次が成り立つ。

$$C_{NJ}((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi_{\alpha,\beta}})) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^2+(1-\alpha)^2}{(1-\alpha)^2} & (\alpha+\beta \geq 1) \\ \dfrac{\beta^2+(1-\beta)^2}{\beta^2} & (\alpha+\beta \leq 1). \end{cases} \tag{3.1}$$

4. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi_{\alpha,\beta}})$ の James 定数

Banach 空間 $(X, \|\cdot\|)$ において、 James 定数 $J(X)$ は

$$J(X) = \sup\{\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} \mid x, y \in X,\ \|x\| = \|y\| = 1\}$$

と定められる。常に $\sqrt{2} \le J(X) \le 2$ が成り立ち、X が Hilbert 空間のとき $J(X) = \sqrt{2}$ である。ただし、逆は成り立たない。$1 \le p \le \infty$ なる p に対し、$J(L_p) = \max\{2^{\frac{1}{p}}, 2^{\frac{1}{q}}\}$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ \dim L_p \ge 2)$ である。さらに X が uniformly non-square であることの必要十分条件は $J(X) < 2$ で与えられる。James 定数は、次の式によっても与えられる。

$$J(X) = \sup\{\varepsilon \mid \delta(\varepsilon) \le 1 - \frac{\varepsilon}{2}\}$$

ここで、 $\delta(\varepsilon)$ は凸性の modulus と呼ばれ、$\delta(\varepsilon) = \inf\{1 - \|\frac{x+y}{2}\| \mid \|x\| = \|y\| = 1,\ \|x-y\| \ge \varepsilon\}$ で与えられる。

以下、AN_2 の場合を考える。$\mathbb{R}^2$ の場合でも NJ 定数、James 定数を一般的に計算できる公式は今のところなく、具体的な例や一定の条件下でいくつかの公式が知られているのみである。その中で次の公式は応用範囲が広くしばしば用いられる。

Proposition 4.1 ([5]). $\psi \in \Psi_2$ が $t = \frac{1}{2}$ で対称であれば、次式が成り立つ。

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)) = \max_{0 \le t \le \frac{1}{2}} \frac{2-2t}{\psi(t)} \psi(\frac{1}{2-2t}).$$

上述の $J(L_p)$ を求める計算で Clarkson の不等式を用いる方法を、2次元の場合ではこの公式により簡略化できる他、2次元 Lorentz 空間の James 定数もこの公式により計算されている ([6])。さらに、この公式により以下の結果が得られる。

Proposition 4.2 ([5]). $\psi \in \Psi_2$ が $t = \frac{1}{2}$ で対称であれば、以下が成り立つ。

(1) $\psi_2 \le \psi$ で $\frac{\psi(t)}{\psi_2(t)}$ が $t = \frac{1}{2}$ において最大値をとるとき、

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)) = 2\psi(\frac{1}{2}).$$

(2) $\psi_2 \ge \psi$ で $\frac{\psi_2(t)}{\psi(t)}$ が $t = \frac{1}{2}$ において最大値をとるとき、

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)) = \frac{1}{\psi(\frac{1}{2})}.$$

(3) $\beta \in [\frac{1}{2}, 1]$ の時、

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi_{1-\beta,\beta}})) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} & (\beta \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}]) \\ 2\beta & (\beta \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]). \end{cases}$$

(3) で、$\beta = \psi_{1-\beta,\beta}(\frac{1}{2})$ であることに注意する。James 定数が、$2\psi(\frac{1}{2})$ か $\frac{1}{\psi(\frac{1}{2})}$ である場合が多いことが分かるが、いずれでもない場合も存在する。次に、α, β に関す

る以下の条件を考える。

$$\psi(\frac{1}{2}) \le \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-\alpha)} & (\alpha+\beta \le 1) \\ \dfrac{1}{2\beta} & (\alpha+\beta \ge 1). \end{cases} \tag{4.1}$$

α と β がともに $\frac{1}{2}$ に十分近いときこの条件は満たされる。例えば、$(\alpha,\beta) = (1-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ の時及び、$1-\frac{1}{\sqrt{2}} \le \alpha \le \frac{1}{2} \le \beta \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ の時は満たされる。さらに、(4.1) の下では、$2\psi_{\alpha,\beta}(\frac{1}{2}) < \frac{1}{\psi_{\alpha,\beta}(\frac{1}{2})}$ となることも分かっている。

Theorem 4.1.

(1) $\psi_{\alpha,\beta}$ が (4.1) を満たす時、$\psi_{\alpha,\beta}(t) \le \psi_2(t)$ $(t \in (0,1))$ が成り立ち、等号は $(\alpha,\beta) = (1-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 且 $t = \frac{1}{2}$ の時に限る。

(2) $\psi_{\alpha,\beta}$ が (4.1) を満たすことと次式は必要十分である。

$$\begin{aligned} J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi_{\alpha,\beta}})) &= \frac{2(\beta-\alpha)}{-1+\alpha+3\beta-4\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{\psi_{\alpha,\beta}(\frac{1}{2})}. \end{aligned}$$

(1) より、条件 (4.1) から $\psi_{\alpha,\beta} \le \psi_2$ が従うので、NJ 定数に関しても、条件 (4.1) は公式 (3.1) が成り立つための十分条件ともなっていることを注意しておく。

次に、$\psi_{\alpha,\beta} \in E$ に対し、

$$E_{\alpha,\beta} = \{\psi \in \Psi_2 \mid \psi_\infty \le \psi \le \psi_{\alpha,\beta}\}$$

とおく。

Theorem 4.2. $\max\{\beta-\alpha,\ 2\beta-1\} \le \alpha\beta$ のとき、次が成り立つ。

(1) すべての $\psi \in E_{\alpha,\beta}$ に対し、$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)) = \dfrac{1}{\psi(\frac{1}{2})}$.

(2) $E_{\alpha,\beta}$ は Ψ_2 の凸部分集合で、関数 $E_{\alpha,\beta} \ni \psi \longrightarrow J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi))$ は $E_{\alpha,\beta}$ 上で凸である。

条件 $\max\{\beta-\alpha,\ 2\beta-1\} \le \alpha\beta$ は α, β が $\frac{1}{2}$ に十分近いとき成立する。例えば $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \le \alpha \le \frac{1}{2} \le \beta \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ であるときは成立する。Proposition 4.2 (2), Theorem 4.1 と併せて、この定理は $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)$ の James 定数が多くの場合に $1/\psi(1/2)$ で与えられることを示している。次の系は、この定理から直ちに得られる結果である。

Corollary 4.1. α, β を Theorem 4.2 におけるものとし、$\alpha \le \alpha' < \frac{1}{2} < \beta' \le \beta$ とする。このとき、$\psi \in \Psi_2$, $\psi_{\alpha',\beta'} \le \psi \le \psi_{\alpha,\beta}$ であれば

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)) \le \frac{1}{\psi_{\alpha',\beta'}(\frac{1}{2})}$$

が成り立つ。

REFERENCES

[1] J. Gao and K.S. Lau, *On the geometry of spheres in normed linear spaces*, J. Aust. Math. Soc., A 48 (1990) pp.101-112.

[2] M. Kato and L. Maligranda, *On the James and Jordan-von Neumann constants of Lorentz sequence spaces*, J. Math. Anal. Appl., 258 (2001) pp.457-465.

[3] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, *On the James and Jordan-von Neumann constants and normal structure coefficient of Banach spaces*, Studia Math., 144 (2001) pp.275-295.

[4] N. Komuro, K.-S. Saito, and K.-I. Mitani, *Extremal structure of Absolute Normalized Norms on* $\mathbb{R}^2$, to appear in Proc. Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization.

[5] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, *The James constant of absolute norms on* $\mathbb{R}^2$, J. Nonlinear Convex Anal., 4 (2003) pp.399-410.

[6] K.-I. Mitani, K.-S. Saito and T. Suzuki, *On the calculation of the James constant of Lorentz sequence spaces*, J. Math. Anal. Appl., 343 (2008) pp.310-314.

[7] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, *Dual of two dimensional Lorentz sequence spaces*, to appear in Nonlinear Analysis.

[8] W. Nilsrakoo and S. Saejung, *The James constant of normalized norms on* $\mathbb{R}^2$, J. Inequal. Appl., (2006) Art. ID 26265, 12pp.

[9] S. Saejung, *On James and von Neumann-Jordan constants and sufficient conditions for the fixed point property*, J. Math. Anal. Appl., 323 (2006) pp.1018-1024.

[10] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan constant of absolute normalized norms on* $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl., 244 (2000) pp.515-532.

Naoto Komuro
Department of Mathematics, Hokkaido University of Education Asahikawa campus,
Asahikawa 070-8621, Japan
E-mail address: komuro@asa.hokkyodai.ac.jp

Kichi-Suke Saito
Department of Mathematics, Fuculty of Science, Niigata University,
Niigata 950-2181, Japan
E-mail address: saito@math.sc.niigata-u.ac.jp

Ken-ichi Mitani
Department of Applied Chemistry and Biotechnology, Faculty of Engineering, Niigata Institute of Technology,
Kashiwazaki, Niigata 945-1195, Japan
E-mail address: mitani@adm.niit.ac.jp